

19/10/2015/

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ φυσικοί

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ακέραιοι

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$ ρημοί

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

$\mathbb{N}, +, \cdot$ δύο πράξεις οχι αριθμοί και οχι αντιστρεψίμοι

$\mathbb{Z}, +, \cdot$ δύο πράξεις οχι αντιστρεψίμοι

$\mathbb{Q}, +, \cdot$ δύο πράξεις

Πως αποδεικνύουμε τις προτάσεις

1] Εγκραφούμε την πρόταση με όσο το δυνατόν λιγότερες λέξεις και με σαφήνεια.

2] Η απόδειξη μας θα στηρίζεται σε κάποιες προτάσεις (δοξικές) που δεν αμφισβητούν δοξικά κενά.

Αν έχουμε μεταφράσεις τις ορίσουμε από την αρχή όπως είναι και τα σύνολα από τα οποία λαμβάνουν τιμές.

π.χ m και n είναι ακέραιοι.

Αν κάποια μεταφράση έχει επιπλέον ιδιότητες αυτές τις συνδυάζουμε μέσα στην απόδειξη.

Προσοχή

1] Χρησιμοποιούμε παραδείγματα για να αντιληφθούμε την πρόταση και πως θα μπορούσαμε να την αποδείξουμε.

► Με παραδείγματα δεν στέκει απόδειξη.

Π.χ Το άθροισμα άρτίων ακέραιων είναι άρτιος.

Έστω n και m άρτιοι $\Leftrightarrow n, m \in \mathbb{Z}'$

$$n = 2k \quad k, d \in \mathbb{Z}'$$

$$m = 2d$$

Θέλουμε $n+m$ άρτιος $\Leftrightarrow n+m = 2r, r \in \mathbb{Z}'$

$$\text{Έχουμε } n+m = 2k+2m = 2(k+m) = 2r$$

2] Δεν χρησιμοποιούμε το ίδιο γράμμα για διαδοχικές μεταβλητές.

Π.χ Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος.

$$m, n \in \mathbb{Z}'$$

$$m = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}'$$

$$n = 2d + 1, d \in \mathbb{Z}'$$

$$\text{Έχουμε } m+n = 2k+1+2d+1 = 2(k+d)+2 = 2(\underbrace{k+d}_r+1) = 2r$$

3] Κατά την διαδικασία της απόδειξης δεν παραδεινουμε βήματα.

4] Προσοχή με το $\Leftrightarrow$.

Δεν μερθεύουμε το " $\Leftrightarrow$ " με το " Επειδή "

Επειδή (χρησιμοποιούμε το " $\Leftrightarrow$ " είναι λάθος)

Π.χ Έστω m περιττός. ~~Εάν~~ m περιττός τότε $m = 2k+1$

5] Μας δίνει μία πρόταση και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ψευδής.

► Ο ανδούστερος τρόπος είναι να βρούμε αντιπαράδειγμα (βρίδω μια τιμή που η πρόταση είναι ψευδής)

$$\text{Π.χ } a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$$

$$(-1)^2 = (1)^2 \Rightarrow -1 = 1$$

$$a=1, b=-1 \Rightarrow 1^2 = (-1)^2$$

Ορισμός

Ένας φυσικός $p \geq 1$ καλείται πρώτος, εάν διαιρείται από τον εαυτό του και το 1

Π.χ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23

Αντικείμενο της Θ.Α. Να βρούμε όλους τους πρώτους;

► Να δείξουμε ότι κάθε άρτιος είναι αθροισμα δύο πρώτων.

Έχουμε: $2 = 1 + 1$

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7$$

$$14 = 3 + 11 = 5 + 9$$

Εικασία-Ισχυρισμός του Goldbach (1690-1764)

Κάθε άρτιος είναι αθροισμα δύο πρώτων ή 1

Έχουν εξετασθεί όλες οι περιπτώσεις $\leq 100.000.000.000.000$

Τελευταίο Θεώρημα του Fermat (1650)

Αν x, y, z και n είναι φυσικός. Τότε δεν υπάρχουν τρία x, y, z ώστε $x^n + y^n = z^n$, για $n \geq 2$ είναι το γνωστό Πιθαγόρειο Θεώρημα.

► Αποδείχθηκε το 2000 από τον Weyls για $n \leq 200.000$

Ταυτότητες

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + a^0b^{k-1})$$

$$= a^k + a^{k-1}b + \dots + a^1b^{k-1} - (a^k + a^{k-2}b + \dots + a^0b^k) = a^k - b^k$$

$a^2 + b^2 = (a+b)(\quad)$ $\rightarrow$ Δεν γίνεται να βρεθεί ότι αυτή την μορφή έχει είναι άθροισμα 2 τετραγώνων.

Ενώ το $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots + b^{2k}) =$$

υπάρχει στοιχείο εδώ το $(-1)^i a^{2k-i} b^i$, $0 \leq i \leq 2k$

$$= a^{2k+1} - a^{2k}b + a^{2k-1}b^2 - \dots + (-1)^i a^{2k-i} b^i + \dots + ab^{2k} +$$

$$a^{2k}b - a^{2k-1}b^2 + a^{2k-2}b^3 - \dots + (-1)^i a^{2k-i} b^{i+1} + \dots + b^{2k+1} = a^{2k+1} + b^{2k+1}$$

$p \Rightarrow q$
 πρόταση πρόταση

$$x^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}$$

$$p \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}$$

Π.Χ Αν ο Κεχαγιάς έχει μεγάλη βαλίτσα τότε έχει πολλά χρήματα.
Ψευδής.

Αν ο Κεχαγιάς έχει πολλά χρήματα τότε θα χρειαστεί μεγάλη βαλίτσα. Αληθής.

Διαίρεση

Ο αστυγίδακας είναι οργάνο, το κουνούκι είναι οργάνο, άρα ο αστυγίδακας είναι κουνούκι.

Αλήθεια. (Γιατί είναι μια συνωνυμία) ~

Αν ερθης στην δουλειά τη Δευτέρα, θα σε προσλάβουμε.

Αν δεν πάει τη Δευτέρα "δεν φτάνουμε".

Π.Χ. a διαιρεί το $\beta \cdot \gamma$ τότε $(\Rightarrow) \begin{cases} a \text{ διαιρεί το } \beta \\ \text{ή} \\ a \text{ διαιρεί το } \gamma \end{cases}$, Λάθος

Αυτο μπορεί να διαχθεί με ένα αντεπαρδείγμα

Π.Χ. $a=10$, $\beta=4$ και $\gamma=5$, $10 \mid 20$ ισχύει, όμως το 10

δεν διαιρεί ούτε το 4 ούτε το 5.